TRANSFORMADA DE LAPLACE

6.1 Aplicando las propiedades de traslación, halle las siguientes trasformadas de Laplace:

(a)	$\mathcal{L}[e^{2t}\operatorname{sen} t]$	(d)	$\mathcal{L}[t^2 U(t-1)]$
(b)	$\mathcal{L}[e^{5t}\cos 2t]$	(e)	$\mathcal{L}[(t-2)U(t-2)]$
(c)	$\mathcal{L}[e^{3t}t]$	(f)	$\mathcal{L}[(t^2-3t+2)U(t-2)]$

6.2 Utilice propiedades de la transformada de Laplace para calcular:

(a)	$\mathcal{L}[t\operatorname{sen} 2t]$	(d)	$\mathcal{L}[\int_0^t \frac{\operatorname{sen} u}{u} du]$
(b)	$\mathcal{L}[t^2\cos 4t]$	(e)	$\mathcal{L}[t\int_0^t \operatorname{sen} u du]$
(c)	$\mathcal{L}[t^n],\ n \geq 1$	(f)	$\mathcal{L}[e^{-2t}\int_0^t ue^{2u}\operatorname{sen} u du]$

6.3 Exprese la siguientes funciones en términos de funciones escalón unitario, dibújelas y obtenga su transformada de Laplace:

$$\text{(a) } f(t) = \begin{cases} 3 & 0 \leq t < 2 \\ 2t-2 & 2 \leq t < 4 \\ \operatorname{sen} t & t \geq 4 \end{cases} \qquad \text{(b) } f(t) = \begin{cases} t & 0 \leq t < 1 \\ 1 & 1 \leq t < 2 \\ 3-t & 2 \leq t < 3 \end{cases}$$

$$\text{(c) } f(t) = \begin{cases} \cos 4t & 0 \leq t < 4\pi \\ 0 & t \geq 4\pi \end{cases} \qquad \text{(d) } f(t) = \begin{cases} e^{-2t} & 0 \leq t < \pi \\ 0 & t \geq \pi \end{cases}$$

6.4 Calcule las siguientes transformadas inversas:

(a)	$\mathcal{L}^{-1}[\frac{e^{-2s}}{s^2}]$	(e)	$\mathcal{L}^{-1}[\frac{e^{-\pi s}}{s^2+1}]$
(b)	$\mathcal{L}^{-1}[\frac{1}{s^2-2s+3}]$	(f)	$\mathcal{L}^{-1}[\frac{e^{-s}}{s^2+s}]$
(c)	$\mathcal{L}^{-1}[\frac{s}{s^2+4s+5}]$	(g)	$\mathcal{L}^{-1}[\frac{1-e^{-\pi s}}{s(s^2+2s+5)}]$
(d)	$\mathcal{L}^{-1}[\frac{6s}{s^2+9}+\frac{3}{2s^2+8s+10}]$		

6.5 Calcule las transformadas inversas de las siguientes funciones racionales de s, mediante descomposición en fracciones simples:

(a)	$F(s) = \frac{s+5}{s^2-4}$	(e)	$F(s) = \frac{s+5}{(s+1)(s^2-4)}$
(b)	$F(s) = \frac{1}{(s+1)^4}$	(f)	$F(s) = \frac{s^3+3s^2+2s-1}{(s+2)^2(s+1)}$
(c)	$F(s) = \frac{7s+3}{(s-2)(s-3)}$	(g)	$F(s) = \frac{-3s^3+2s^2+8}{s^2(s^2+4)}$
(d)	$F(s) = \frac{s^2+1}{(s+1)(s^2+4)}$	(h)	$F(s) = \frac{s-1}{((s-1)^2+1)(s+4)}$

6.6 Obtenga la transformada de Laplace de la siguientes funciones periódicas:

(a) $f(t) = \frac{a}{b}t$ de período $b > 0$ (función serrucho).

(b) $f(t) = \begin{cases} \operatorname{sen} t & 0 \le t \le \pi \\ 0 & \pi \le t \le 2\pi \end{cases}$ de período 2π.

(c) $f(t) = \begin{cases} t & 0 \le t \le 1 \\ 2-t & t \ge 1 \le 2 \end{cases}$ de período 2 (función onda triangular).

(d) $f(t) = \begin{cases} 0 & 0 \le t < 2a \\ 1 & 2a \le t < 4a \end{cases}$ de período $4a$, $a > 0$ (función onda cuadrada).

6.7 Resuelva las siguientes ecuaciones diferenciales con condiciones iniciales:

(a) $\begin{cases} y'' - 3y' + 2y = 2e^{3t} \\ y(0) = 0,\ y'(0) = 1 \end{cases}$

(b) $\begin{cases} y'' + y = e^{t} \\ y(1) = 1,\ y'(1) = 0 \end{cases}$

(c) $\begin{cases} y'' - 5y' + 4y = 4 \\ y(0) = 0,\ y'(0) = 2 \end{cases}$

(d) $\begin{cases} ty'' + 4y' + 9ty = \cos(3t) \\ y(0) = 0,\ y'(0) = \dfrac{1}{4} \end{cases}$

(e) $\begin{cases} y' + y = \begin{cases} 1 & 0 \le t < 2 \\ 0 & t \ge 2 \end{cases} \\ y(0) = 0 \end{cases}$

(f) $\begin{cases} y'' - 2y' + y - 2\int_0^t y(u)du = 5,\ t > 0 \\ y(0) = 1,\ y'(0) = 0 \end{cases}$

6.8 Resuelva los siguientes sistemas de ecuaciones diferenciales con condiciones iniciales:

(a) $\begin{cases} x' = 2x - 3y + 4 - 2t \\ y' = -2y + x + 2 - t \\ x(0) = -1,\ y(0) = 0 \end{cases}$

(b) $\begin{cases} x' + 3\int_0^t x(u)du + y = \begin{cases} 1 & 0 < t < 1 \\ 0 & t \ge 1 \end{cases} \\ y' - x = 0 \\ x(0) = 0,\ y(0) = 0 \end{cases}$

(c) $\begin{cases} x' = y + \begin{cases} 0 & 0 \le t < 2 \\ 1 & 2 \le t < 3 \\ 0 & t \ge 3 \end{cases} \\ y' = x + 1 \\ x(0) = 1;\ y(0) = 1 \end{cases}$

(d) $\begin{cases} x' = x + 6e^{t}\cos t \\ y' = y - 2x + e^{-t} \\ x(0) = 3;\ y(0) = 0 \end{cases}$

6.9 Calcule, utilizando transformada de Laplace, las siguientes integrales:

(a) $\displaystyle\int_0^\infty t(1 - e^{-t/2} + e^{-2t})\cos t dt$ (b) $\displaystyle\int_0^\infty \frac{e^{-t} - e^{-3t}}{t} dt$ (c) $\displaystyle\int_0^\infty e^{-t^2} dt$

6.10 Demuestre, utilizando transformada de Laplace, la siguiente identidad

$$\int_0^t \operatorname{sen} x \cos(t-x) dx = \frac{t \operatorname{sen} t}{2}$$

6.11 Calcule la tranformada de $f(t) = t\int_0^t (t-u)e^{(t-2u)} \operatorname{sh} 2u\, du$.

6.12 Aplique la propiedad de convolución para obtener la transformadas inversas:

(a) $F(s) = \dfrac{1}{s^2(s^2+4)}$ (b) $F(s) = \dfrac{1}{(s^2+9)^2}$